第13回　量子力学 I 演習 問題

樋口 さぶろお[1]

2000 年 2 月 7 日

お知らせ

- この演習の評価は, 毎週の提出物で行ないます. 試験はありません.
- 今回の演習のレポートは 2 月 14 日まで受け付けます. ただし, 前回以前の問題で, すでに解答を配ってしまったものについては 成績には算入しません.
- 今回の演習の答案と解答は, 2 月 16 日以降に, 16-809B の前のポストから各自とっていって下さい. ただし, 3 月以降は処分してしまうかもしれません.
- 以下は 4 年生でない方の場合の日程です. 4 年生は日程が異なりますので, 事前に個別に相談しましょう.
- 2 月 16 日までに成績に関する掲示を行ないます.
- 成績についての疑問, 質問, 相談は 2 月 24 日までにお願いします. (2 月中には樋口が不在の期間がありますので, 時間がない場合には, 電話, mail, 伝言などでもけっこうですので, とりあえず疑問 etc. があることを連絡して下さい)

13.1　1 次元の確率の流れ密度

問題

[1]`hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp`, URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`,
へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

[1]この文書の最新版は`http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/qm1-99/` にあるかもしれません.

1 次元の波動関数 $\Psi(x,t)$ を考えたとき, 関数

$$\rho(x,t) := |\Psi(x,t)|^2 \tag{13.1Q.1}$$

は確率密度と解釈される. 確率流れ密度 $j(x,t)$ を

$$j(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\left[\Psi(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)^* - \Psi(x,t)^*\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)\right]$$

と定義する.

1. 次の波動関数について, 確率密度, 確率流れ密度を求めよ ($k,\omega,a \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{C}$).

$$\Psi(x,t) = A\exp(ikx - i\omega t),$$
$$\Psi(x,t) = A\exp(-x/a - i\omega t).$$

2. Hamiltonian $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ のもとで時間発展する波動関数 $\Psi(x,t)$ について, 局所的な確率保存則 (連続の式)

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}j(x,t) = 0 \tag{13.1Q.2}$$

が成立することを示せ.

Remark. 確率流れ密度は, 3 次元では vector となり,

$$\mathbf{j}(\mathbf{x},t) = \frac{i\hbar}{2m}\left[\Psi(\mathbf{x},t)\nabla\Psi(\mathbf{x},t)^* - \Psi(\mathbf{x},t)^*\nabla\Psi(\mathbf{x},t)\right] \tag{13.1Q.3}$$

と書かれる.

13.2 1 次元での散乱問題 (トンネル効果)

問題

1 次元の potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0 : \text{領域 I}) \\ V_0 > 0 & (0 \le x \le a : \text{領域 II}) \\ 0 & (x \ge a : \text{領域 III}) \end{cases} . \tag{13.2Q.1}$$

のもとで, 境界条件

$$\psi(x) \overset{x\to+\infty}{\to} Ce^{ikx} \ (\exists k>0, C\neq 0) \tag{13.2Q.2}$$

を満たす (時間に依存しない) Schrödinger 方程式の解を, (与えられた) エネルギー固有値 $0<E<V_0$ に対して求めよ.

これは束縛状態でないので, E の値は定まらない (連続的な値が許される). また規格化はしなくてよい (できない).

方針が思い浮かばない人は, 以下の方針にしたがってもよい.

1. Hamiltonian $H=p^2/2m+V(x)$ の固有値 E の固有関数を求めよ (領域 I, II, III にわけて考えよ).

Hint. 境界条件がないので, この段階では積分定数は決まらない.

2. 以下, $0<E<V_0$ の場合を考える. 領域 III で x の正の方向に進む解 $\psi_{\mathrm{III}}(x)=Ce^{ikx}$ $(k>0)$ を考えたとき, それに接続する領域 II での解を求めよ.

Hint. $x=a$ で, 波動関数とその微分の連続性が接続の条件.

3. 上で求めた領域 II での解を接続して領域 I の解を求めよ.

13.3　1 次元での散乱問題 (トンネル効果)

問題

1 次元の potential のもとで, $x=-\infty$ の側から正の向きに入射する質量 m の粒子の散乱を考える:

$$V(x)=\begin{cases} 0 & (x\leq 0: \text{領域 I}) \\ V_0>0 & (0\leq x\leq a: \text{領域 II}) \\ 0 & (x\geq a: \text{領域 III}) \end{cases} . \tag{13.3Q.1}$$

粒子の透過係数, 反射係数を

- エネルギー $0<E<V_0$ のとき
- エネルギー $E>V_0$ のとき

に求めよ. 入射波がすべて反射されたり, すべて透過したりするようなエネルギー E はあるか.

方針が思い浮かばない人は, 以下の方針にしたがってもよい.

1. 散乱されている粒子を表す波動関数 $\psi(x)$ は, 次を満たすと考えられる.

   - Hamiltonian の固有関数である.
   - $x \to -\infty$ での漸近形が, ある波数 $k > 0$ で $\psi(x) \sim A\exp[ikx] + B\exp[-ikx]$ である (ここで, $A\exp[ikx]$ が入射波, $B\exp[-ikx]$ が反射波を表す).
   - $x \to +\infty$ での漸近形が, ある波数 $k > 0$ で $\psi(x) \sim C\exp[ikx]$ である (これは散乱波を表す. 粒子は負の方向から入射しているので, $D\exp[-ikx]$ のような成分はない).

   そのような波動関数を求める.

2. 確率流れ密度は

$$j(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\left[\Psi(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)^* - \Psi(x,t)^*\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)\right] \tag{13.3Q.2}$$

   で定義されるのだった. 無限遠 $x \to \pm\infty$ での, 入射波, 反射波, 散乱波 (透過波) の確率流れ密度 $j_{\mathrm{I}}(x = -\infty), j_{\mathrm{r}}(x = -\infty), j_t(x = +\infty)$ を用いて, 反射係数 R, 透過係数 T を

$$R := \frac{|j_{\mathrm{r}}(x = -\infty)|}{|j_{\mathrm{I}}(x = -\infty)|}, T := \frac{|j_{\mathrm{t}}(x = +\infty)|}{|j_{\mathrm{I}}(x = -\infty)|} \tag{13.3Q.3}$$

   と定義する. 確率の保存 $R + T = 1$ は成り立っているか.

13.4　1 次元での散乱問題

問題

Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ V_0 > 0 & (x > 0). \end{cases} \tag{13.4Q.1}$$

に, $x = -\infty$ からエネルギー E の粒子が入射する散乱問題を考える.

1. エネルギーが $V_0 < E$ のとき, 透過係数, 反射係数を求めよ.

Hint. 透過係数, 反射係数の定義をよく思い出す.

2. エネルギーが $0 < E < V_0$ のとき, 透過係数, 反射係数を求めよ.

参考文献

[1] 清水先生の講義ノート `http://as2.c.u-tokyo.ac.jp/lecture_note/index.html`

[2] サクライ, 現代の量子力学 (吉岡書店)