量子力学 I 演習 問題 (第 1 回)

樋口 さぶろお*

1996 年 4 月 11 日

はじめに

予備知識 この演習では, 主に, 講義 量子力学 II (吉岡先生) の進度に同期して問題を解きます. また, 95 年冬学期の講義 量子力学 I (桜井先生) の復習となる問題も扱います. したがって, 量子力学 I · II を履修せず, この演習だけを履修する場合には, 相当する内容を各自が学習することが必要になります.

教科書 プリントを配布します. 問題の一部は, 量子力学 II の教科書 [1] に基づきます.

評価 出席回数, 授業中に解いた問題, レポートなどにより判定します. 出席重視. 試験は行わない予定.

通知 この演習に関する通知は, 4 号館 413B 号室の前の壁, および

URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/qm1/`

で行ないます. 必ずしも 4 号館の入口の掲示板は用いないので注意して下さい.

演習の進め方 未定ですが, 今回については,

- 授業時間内にいくつかの問題をレポート用紙 (A4 だと助かる) に解いて提出してください. たくさん解けなかった場合でも, 授業中に物理を考えていたことがわかるように何か書いて提出して下さい. これで出席とします.
- 水曜日の朝までに, 暇と興味に応じて好きなだけ問題を解いて, レポートとして 413B の前のポストに提出して下さい. 授業中に解いた分とあわせて, 1 (大) 問以上解くようにして下さい.
- 次回に問題 (の一部) を解説し, 間に合えばレポートを返却します.

以下は問題.

*Internet address: `hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp` URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig`, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

[1-1]　アンケート I

あなたの持っている予備知識について答えてください.

1. 学部, 学科, コース, 学年 はなんですか.
2. 1 年生のとき, 物理学の A コース, B コースの区別があった人は, そのどちらを学びましたか.
3. これまでに量子力学を勉強したことがありますか. どの程度ですか. 特に, 量子力学に関係するどの講義に出席しました (しています) か.

[1-2]　アンケート II

演習の進め方, 評価の方法, 宿題の量などについて提案があれば書いてください. ただし, 出席を重視して評価を行なうことは, 変えられない前提とします.

[1-3]　波動関数の境界条件と規格化

1 次元空間 $0 \leq x \leq L$ を運動する粒子の波動関数

$$\Psi(x,t) = A\exp[i(kx - \omega t)] + B\exp[i(-kx - \omega t)] \tag{1}$$

を考える.

1. 両端 $x = 0, L$ で $\Psi(x,t) = 0$ という境界条件を満たすように定数 k を決めよ.
2. $x < 0, L > x$ で $\Psi(x,t) = 0$ であるとして, 規格化条件から A, B を決めよ.
3. 上で求めた k, A, B に対し, $\Psi(x,t)$ の概形を描け.

[1-4]　波動関数の規格化

次の波動関数 $\Psi(\boldsymbol{x},t)$ の形を直観的にとらえよ. これらは規格化可能か. 可能なものに対しては, 規格化定数を定めよ. 粒子を発見する可能性が zero であるような点 (無限遠を含む) があるか. (引数が 3 次元 vector $\boldsymbol{x}$ のものは 3 次元の波動関数, 1 次元座標 x のものは 1 次元の波動関数)

$$\Psi(\boldsymbol{x},t) = \exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)] \tag{2}$$

$$\Psi(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\exp[i(k|\boldsymbol{x}| - \omega t)] \tag{3}$$

$$\Psi(x,t) = \exp[-i\omega t]\exp[-(kx)^2/2] \tag{4}$$

$$\Psi(x,t) = \exp[-i\omega t]kx\exp[-(kx)^2/2] \tag{5}$$

[1-5]　演算子代数

演算子 A, B に対して交換子 $[A, B]$ を $[A, B]f(x) := ABf(x) - BAf(x)$ と定義する. ただし, $f(x)$ は任意の関数. 演算子 $A^\dagger, A$ を

$$(6) \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + x\right), A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} - x\right)$$

とするとき次を求めよ.

$$(7) \qquad A^\dagger x \exp(-x^2/2),$$

$$(8) \qquad [A, A^\dagger],$$

$$(9) \qquad (2AA^\dagger + 1)\exp(-x^2/2).$$

[1-6]　交換子の性質

演算子 A, B, C に対して次を示せ.

$$(10) \qquad [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \quad \text{(Jacobi identity)},$$

$$(11) \qquad [A, BC] = B[A, C] + [A, B]C \quad \text{(Leibniz rule)}.$$

以下, $[[A, B], B] = 0$ を仮定する.

$$(12) \qquad [A, B^n] = n[A, B]B^{n-1},$$

$$(13) \qquad [A, g(B)] = [A, B]\,\frac{dg}{dz}(B).$$

ただし, g は関数で巾級数

$$(14) \quad g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j z^j$$

に展開可能とする (十分よい収束性を持つとしてよい).

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968).

[3] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985)