量子力学 I 演習 問題 (第 2 回)

樋口 さぶろお*

1996 年 4 月 18 日

[2-1] 固有状態・規格直交性・期待値

有限な 1 次元空間 $0 < x < L$ を運動する粒子の波動関数

(1) $\psi_k(x) = A\exp(ikx)$

を考える. A は複素数, k は実数. テキスト [1] の例題 1.7 等を参照せよ.

1. この波動関数が, 自由粒子の運動量演算子 $-i\hbar(d/dx)$, Hamiltonian $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ の固有関数であることを示せ. 固有値を求めよ.
2. 以下, 周期境界条件 $\psi_k(0) = \psi_k(L)$ を課す (つまり, 円周上に拘束された粒子). このとき, k に対する条件を求めよ.
3. 規格化定数 A の値を定めよ.
4. 周期境界条件を満たす ψ_k, $\psi_{k'}$ $(k \neq k')$ が, 互いに直交していることを示せ.
5. 粒子が, 上の波動関数の重ねあわせ

   (2) $\psi(x) = \psi_k(x) - 2\psi_{2k}(x) = \exp(ikx) - 2\exp(i(2k)x)$

   であらわされる状態にある. 位置と運動量の期待値を求めよ (Hint: 規格化).

[2-2] x, p の交換関係

演算子 x, p が正準交換関係 $[x, p] = i\hbar$ を満たすとする.

1. 'x-表示' $x \to x\times$, $p \to -i\hbar(d/dx)$ が上の正準交換関係を満たすことを示せ.
2. $[x^2, p^2] = 2\hbar^2 + 4i\hbar xp$ を示せ (上の x-表示をとってもよい).
3. 上の x-表示をとったとき, 演算子 p^2x^2 を 関数 $\sin ax$ に作用させてみよ.

*Internet address: hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

[2-3]　演算子の関数の微分

演算子 $f(A,B)$ を, 演算子 A,B の関数とする. 演算子の偏微分を

$$\frac{\partial f}{\partial A} := \lim_{a\to 0}\frac{f(A+a,B)-f(A,B)}{a} \tag{3}$$

と定義する. a は古典的な (全ての演算子と可換な) 数.

1. $f(A,B)=ABAB+AABB$ に対し, $\partial f/\partial A$ を求めよ.

2. $(d/dA)\exp A$ を求めよ.

[2-4]　並進演算子

演算子 $x, p=-i\hbar(d/dx)$ を 1 次元の位置, 運動量演算子とする. すなわち, $[x,p]=i\hbar$.

1. 交換子 $[x,\exp(ipa/\hbar)]$ を求めよ. a は実数.

2. 波動関数 $\psi_0(x)$ を, 演算子 x の固有関数とする. 固有値を x_0 とする. すなわち, $x\psi_0(x)=x_0\psi_0(x)$. 波動関数 $\exp(ipa/\hbar)\psi_0(x)$ も演算子 x の固有関数であることを示せ. 固有値は何か (上の交換子が計算できれば, $\psi_0(x)$ の具体的な形はいらないはず).

3. 演算子 $\exp(ipa/\hbar)$ にはどのような直観的意味があるか.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[4] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.