量子力学 I 演習 問題 (第 4 回)

樋口 さぶろお*

1996 年 5 月 2 日

[4-1] 演算子の行列表示

1. Hermite 演算子の定義をかけ.
2. Hermite 行列の定義をかけ.
3. 正規直交系 $\{\phi_n\}_{n=1,2,\ldots}$ をとった時の, 演算子 A の表現行列をかけ.
4. Hermite 演算子の表現行列は Hermite 行列であることを示せ.

[4-2] 表現行列, 基底の変換

周期境界条件のもとで有限な 1 次元空間 $0 \le x < L$ を運動する粒子の波動関数を考える. 波動関数

(1) $\psi_n(x) = L^{-1/2} \mathrm{e}^{2\pi nix/L} \quad (n \in \mathbf{Z})$

は運動量演算子の固有関数で, 正規直交完全系をなすのだった. 一方, 波動関数

(2) $\phi_{x_0}(x) = \delta(x - x_0) \quad (0 \le x_0 < L)$

は位置演算子の固有関数で, 正規直交完全系をなす.

1. 波動関数の族 $\{\phi_{x_0}\}_{0 \le x_0 < L}$ について正規直交関係 $\langle \phi_{x_1} | \phi_{x_2} \rangle = \delta(x_1 - x_2)$ を示せ.
2. 波動関数の族 $\{\phi_{x_0}\}_{0 \le x_0 < L}$ が完全系をなすことを納得せよ.
3. 完全系 $\{\psi_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ に関して, 運動量演算子の表現行列を求めよ.
4. 完全系 $\{\phi_{x_0}\}_{0 \le x_0 < L}$ に関して, 位置演算子の表現行列を求めよ.
5. 基底変換の行列 $\langle \phi_{x_0} | \psi_n \rangle$ を求めよ.
6. 完全系 $\{\psi_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ に関して, 位置演算子の表現行列を, 基底変換により求めよ. これが, 単純に $\langle \psi_m | x | \psi_n \rangle$ を x-積分で計算するのと同じ結果を与えることを納得せよ.

---

*Internet address: `hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp` URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

[4-3]　Hermite 演算子の固有値, 固有状態

1. Hermite 演算子の固有値は実数であることを示せ.

Hint 固有状態 ϕ について, $\langle\phi|A|\phi\rangle$ を考えてみよ.

2. Hermite 演算子の, 異なる固有値に属する固有状態はたがいに直交することを示せ.

Hint 2 つの固有状態 ϕ_1, ϕ_2 について, $\langle\phi_1|A|\phi_2\rangle$ を考えてみよ.

[4-4]　運動量表示の波動関数

テキストの問題 1-4[4] を参照せよ. 規格化された波動関数

(3)　$$\psi(x) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dp \phi(p) \exp(ipx/\hbar)$$

を考える. 関数 $\phi(p)$ を, 波動関数 ψ であらわされる状態の, 運動量表示の波動関数という.

1. 運動量の期待値 $\langle\psi| - i\hbar(d/dx)|\psi\rangle$ を (p の一重積分の形に) 求めよ.

Hint 先に x-積分を実行する.

2. 位置の期待値 $\langle\psi|x|\psi\rangle$ を (p の一重積分の形に) 求めよ.

Hint 被積分関数の中の x を d/dp などで書き直せないか.

3. 位置表示の波動関数 $\psi_k(x) = \exp(ikx)$ を運動量表示にせよ.

上の過程で, おそらく, δ-関数の積分表示 (テキストの問題 1-5[4] 参照)

(4)　$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp(ipx)$$

および δ-関数の性質

(5)　$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0) \quad (f \text{ は任意の関数})$$

を用いることになるだろう.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[4] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.