量子力学 I 演習 問題 (第 5 回)

樋口 さぶろお*

1996 年 5 月 9 日

[5-1] 演算子の表現行列

$\psi(0) = \psi(L) = 0$ の課せられた 1 次元空間 $0 \le x \le L$ に自由粒子が閉じ込められている. 規格化された波動関数の族

(1) $$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

を考える.

1. 自由粒子の Hamiltonian の表現行列 $\langle \psi_m | p^2/2m | \psi_n \rangle$ を求めよ.
2. 運動量演算子の表現行列 $\langle \psi_m | p | \psi_n \rangle$ を求めよ.
3. 座標演算子の表現行列 $\langle \psi_m | x | \psi_n \rangle$ が非対角成分を持つことを示せ.

[5-2] 調和振動子

位置, 運動量演算子をそれぞれ x, p ($[x, p] = i\hbar$, あるいは $p = -i\hbar \frac{d}{dx}$ と思ってもよい) とするとき, 調和振動子の Hamiltonian は,

(2) $$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

である ($m, \omega \in \mathbf{R}$). 昇降演算子 $b, b^\dagger$ を

$$\begin{aligned} (3) \quad b &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (x - (im\omega)^{-1} p) \\ (4) \quad b^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (x + (im\omega)^{-1} p) \end{aligned}$$

と定義する (これらは互いに Hermite 共役である).

1. 式 $H = \hbar\omega b^\dagger b + \hbar\omega/2$ を示せ (x, p が非可換であることに注意).
2. 交換子 $[b, b^\dagger]$ を求めよ.

*Internet address: `hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp` URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

3. Hermite 演算子 $b^\dagger b$ の, 固有値 a の規格化された固有状態を $|\phi_a\rangle$ とするとき, $b^\dagger|\phi_a\rangle = \sqrt{a+1}\,|\phi_{a+1}\rangle\,, b\,|\phi_a\rangle = \sqrt{a}\,|\phi_{a-1}\rangle$ を示せ (規格化条件に注意).

4. 期待値 $\langle\phi_0|x|\phi_0\rangle, \langle\phi_0|x^2|\phi_0\rangle$ を求めよ (Hint: x を $b, b^\dagger$ でかく. 途中で Hermite 演算子の固有状態の直交性を使う.).

[5-3]　完全性

波動関数の族 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を正規直交系とする. 族 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が完全系をなすとは, 任意の波動関数 ϕ が, ある係数 a_n により

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \alpha_n(x) \tag{5}$$

と展開できることであった.

1. Bra, ket の記法を用いたとき, 波動関数の族 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が完全系をなすことと, 式

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n\rangle\langle\alpha_n| = 1 \tag{6}$$

が成立することが同値であることを示せ.

Hint. 式 (5) で $a_n = \langle\alpha_n|\phi\rangle$ となる.

2. 完全性が

$$\sum_n \alpha_n^*(x)\alpha_n(x') = \delta(x-x') \tag{7}$$

とも同値であることを示せ.

Hint. 式 (6) に近い.

3. 波動関数の族 $\{|\phi_n\rangle\}_{n\in\mathbf{N}}, \{|\psi_n\rangle\}_{n\in\mathbf{N}}$ をそれぞれ正規直交完全系とするとき, 複素行列 $U_{mn} = \langle\psi_m|\phi_n\rangle$ は unitary であることを示せ.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[4] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.