量子力学 I 演習 問題 (第 6 回)

樋口 さぶろお*

1996 年 5 月 16 日

[6-1] 完全性

波動関数の族 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を正規直交系とする. 族 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が完全系をなすとは, 任意の波動関数 ϕ が, ある係数 a_n により

$$(1) \quad \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \alpha_n(x)$$

と展開できることであった.

1. Bra, ket の記法を用いたとき, 波動関数の族 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が完全系をなすことと, 式

   $$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n\rangle \langle\alpha_n| = 1$$

   が成立することが同値であることを示せ.

Hint. 式 (1) で $a_n = \langle\alpha_n|\phi\rangle$ となる.

2. 完全性が

   $$(3) \quad \sum_n \alpha_n^*(x)\alpha_n(x') = \delta(x-x')$$

   とも同値であることを示せ.

Hint. 式 (2) に近い.

3. 波動関数の族 $\{|\phi_n\rangle\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\{|\psi_n\rangle\}_{n\in\mathbf{N}}$ をそれぞれ正規直交完全系とするとき, 複素行列 $U_{mn} = \langle\psi_m|\phi_n\rangle$ は unitary であることを示せ.

*Internet address: `hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp` URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

[6-2]　時間発展演算子

系の Hamiltonian H は時刻によらないとする．時刻 t での波動関数を $\Psi(t)$ とかく．異なる時刻 t_1, t_2 における波動関数が, '時間発展演算子' $U(t_2, t_1)$ により

$$(4)\quad \Psi(t_2) = U(t_2, t_1)\Psi(t_1)$$

で関係づけられるとしよう．実は時間発展演算子は Hamiltonian H を用いて

$$(5)\quad U(t_2, t_1) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}H(t_2 - t_1)\right]$$

と書かれることが知られている．以下, 式 (5) を仮定し, 自然な結論が導かれることをを見る．

1. $U(t_3, t_2)U(t_2, t_1) = U(t_3, t_1), U(t, t) = 1, U(t_1, t_2) = U(t_2, t_1)^{-1}$ を示せ.
2. 時間発展演算子 U が unitary 演算子であることを示せ.
3. 規格化が時間発展のもとで保たれること (確率の保存) $\langle\Psi(t_1)|\Psi(t_1)\rangle = \langle\Psi(t_0)|\Psi(t_0)\rangle$ を示せ (Hint: unitary 性).
4. 波動関数 $\Psi(t) = U(t, t_0)\Psi(t_0)$ の時間発展が Schrödinger 方程式

   $$(6)\quad i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi$$

で記述されることを示せ.

[6-3]　Heisenberg 表示

時刻 t における期待値は, 時刻に依存する状態 $|\Psi(t)\rangle$ と時刻に依存しない演算子 A により $\langle\Psi(t)|A|\Psi(t)\rangle = \left\langle\Psi(t_0)U(t, t_0)^\dagger|A|U(t, t_0)\Psi(t_0)\right\rangle$ とかける．Heisenberg 表示とは, $|\Psi(t_0)\rangle$ を時刻に依存しない状態, $A(t) := U(t, t_0)^\dagger AU(t, t_0)$ を時刻に依存する演算子と見る表示のことをいう．

1. 演算子 $A(t)$ のしたがう運動方程式

   $$(7)\quad \frac{d}{dt}A(t) = \frac{i}{\hbar}[H, A(t)]$$

   を示せ.
2. Hamiltonian $H = p^2/(2m)$ で表される 1 次元の自由粒子について, 位置演算子 x, 運動量演算子 p の Heisenberg 表示 $x(t), p(t)$ を $x(0), p(0)$ で表せ [1, 例題 2.8].

[6-4]　角運動量代数

角運動量演算子 L_x, L_y, L_z は, $L_x := yp_z - zp_y$ などと定義される (ただし $[x, p_x] = i\hbar, [y, p_x] = 0$ など). 演算子 M_x, M_y, M_z を $L_x = \hbar M_x$ などと定義する.

1. 演算子 $M^2 := M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$ とする. 交換子 $[M_x, M_y], [M^2, M_z]$ が何だったか思い出せ (導かなくてもよい).

2. $M_\pm = M_x \pm iM_y$ (複号同順) と定義する. 交換子 $[M_\pm, M_x], [M_\pm, M_y], [M_\pm, M_z]$ を求めよ.

3. M^2, M_z の同時固有関数を ψ_{jm} と書く. ただし, M^2 の固有値が $\lambda \equiv j(j+1)$, M_z の固有値が m ([1, (3.6)] の定義と異なるので注意). 式

$$M_\pm \psi_{jm} = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\ \ \psi_{j\ m\pm 1}$$

を示せ. なお, $M_+^\dagger = M_-$ に注意.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[4] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.