量子力学 I 演習 問題 (第 7回)

樋口 さぶろお*

1996 年 5 月 30 日

[7-1] 角運動量代数

角運動量演算子 L_x, L_y, L_z は, $L_x := yp_z - zp_y$ などと定義される (ただし $[x, p_x] = i\hbar, [y, p_x] = 0$ など. すなわち, $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_i j$, $[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0$). 演算子 M_x, M_y, M_z を $L_x = \hbar M_x$ などと定義する.

1. 演算子 M_x が hermite 演算子であることを示せ.

Hint. x, y, z, p_x, p_y, p_z が hermite 演算子であることは使ってよい.

2. 交換子 $[M_x, M_y]$ を求めよ.

3. 演算子 $M^2 := M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$ とする. 交換子 $[M^2, M_z]$ を計算せよ. この結果から, M^2 と M_z は同時に対角化できることがわかる.

Hint. M_x, M_y, M_z, M^2 の交換関係だけを使って計算できる. 添字の対称性を利用.

[7-2] 角運動量演算子の固有状態

1. $M_\pm := M_x \pm iM_y$ (複号同順) と定義する. 交換子 $[M_\pm, M^2], [M_\pm, M_z], [M_+, M_-]$ を求めよ.

Hint. M_x, M_y, M_z の交換関係だけを使って計算できる. 添字の対称性を利用.

Hint. 式 $M^2 = \frac{1}{2}(M_+M_- + M_-M_+) + M_z^2$ を用いると簡単になるかもしれない.

2. M^2, M_z の同時固有関数を ψ_{jm} と書く. ただし, 固有値は,

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad & M^2\psi_{jm} &= j(j+1)\psi_{jm}, \\
&(2) \quad & M_z\psi_{jm} &= m\psi_{jm}.
\end{aligned}
$$

*Internet address: hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

である．式

(3) $\quad M_\pm \psi_{jm} \propto \psi_{j\ m\pm1}$

を示せ.

Hint. 調和振動子の昇降演算子のときの証明と同じ方法.

Remark. 正しい規格化を行なうと

(4) $\quad M_\pm \psi_{jm} = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\ \ \psi_{j\ m\pm1}$

である．これを示すには, $M_+^\dagger = M_-$ などを用いる．

[7-3]　球関数

極座標

$$
\begin{aligned}
&(5) & x &= r\sin\theta\sin\phi \\
&(6) & y &= r\sin\theta\cos\phi \\
&(7) & z &= r\cos\theta
\end{aligned}
$$

をとる.

演算子 M_z, M^2 の同時固有関数の $\psi_{j\ -j}(r,\theta,\phi)$ を考える．次の手順で, $\psi_{j\ -j}(r,\theta,\phi) = R(r)Y_{j\ -j}(\theta,\phi)$ とかいたときの球関数 $Y_{j\ -j}(\theta,\phi)$ を具体的に求めよ．以下, 規格化は暇と興味のある人だけ気にすればよい.

1. $Y_{j\ -j}(\theta,\phi)$ が θ と ϕ に変数分離されるとして, ϕ-依存性を, $M_z Y_{j\ -j} = -jY_{j\ -j}$ から決めよ.

Hint. $M_z = -i\frac{\partial}{\partial\phi}$.

2. 式 (4) より $M_-\psi_{j\ -j} = 0$ となる．これを解いて $Y_{j\ -j}$ の θ-依存性を決めよ．ただし, $M_\pm$ は

$$M_\pm = \mathrm{e}^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

という表示を持つことを使ってよい.

3. $Y_{j\ (1-j)}(\theta,\phi)$ を求めよ.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[4] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.