量子力学 I 演習 問題 (第 8回)

樋口 さぶろお*

1996 年 6 月 6 日

[8-1]　中心力場

中心力ポテンシャル $U(r)$ のもとで 3 次元空間を運動する, 質量 m の粒子の量子力学を考える.

1. (時間に依存しない) Schrödinger 方程式をかけ.
2. 極座標 (r, θ, ϕ) をとったとき, 波動関数 $\Psi(r, \theta, \phi)$ が

$$(1) \quad \Psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

と変数分離されるとする. $R(r)$, $\Theta(\theta)$, $\Phi(\phi)$ の満たす方程式をかけ (hint: 方位量子数, 磁気量子数にあたる新しい定数が 2 つ現れる). ただし, Laplacian ∇^2 の極座標表示

$$(2) \quad \nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\boldsymbol{L}^2$$

は使ってよい ($\boldsymbol{L}^2$ は, 全角運動量).

3. $\chi(r) := R(r)r$ と定義すると, $\chi(r)$ は, ポテンシャル

$$(3) \quad V_\ell(r) = U(r) + \frac{\hbar^2}{2mr^2}\ell(\ell+1)$$

のもとで 1 次元空間を運動する粒子の波動関数であることを示せ [1, 式 (3.27),(3.28)].

*Internet address: `hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp` URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

[8-2]　水素原子

水素原子中の電子の量子力学は, 上の中心力場の問題で

(4)　$U(r) = -\dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

とおいた場合に相当する. この場合, 動系方向の波動関数 $\chi_{n\ell} = R_{n\ell}(r)r$ (n: 主量子数, ℓ: 方位量子数 $(< n)$) は

(5)　$\chi_{n\ell} \sim D^-_{\ell+1}\cdots D^-_{n-2}D^-_{n-1}\chi_{n\,n-1}$

ただし,

$$
\begin{aligned}
(6)\quad \chi_{n\,n-1}(r) &\sim r^n \exp\left(-\frac{1}{n}\frac{e^2 mr}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\right), \\
(7)\quad D^-_\ell &= \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2 m}\left(\frac{d}{dr}+\frac{\ell}{r}\right)-\frac{1}{\ell}
\end{aligned}
$$

となる [1, p.57].

$(n,\ell) = (2,1), (2,0)$ について, 軌道の平均 2 乗半径 $\langle r^2\rangle$ を求めよ.

[8-3]　1 次元の井戸型ポテンシャル

質量 m の粒子が, 1 次元空間を, 幅 $2a$, 深さ U_0 の '井戸型' ポテンシャル

$$
(8)\quad U(x) = \begin{cases} 0 & x < -a & \text{領域 I} \\ U_0(<0) & |x| < a & \text{領域 II} \\ 0 & x > +a & \text{領域 III} \end{cases}
$$

のもとで運動している. 束縛状態のエネルギーを求めよ (注: エネルギーは超越関数を含んだ方程式の根として与えられるが, その方程式は解けないので, 方程式をできるだけ簡単化するだけでよい). 基底状態, いくつかの励起状態の波動関数の概要を示せ.

解き方が思いうかばない人は, 以下の手順に従ってもよい. 規格化は気にしなくてよい.

1. エネルギーを E とおき, 領域 I, II, III で, それぞれ Schrödinger 方程式を解け (それぞれ, 2 つの解の線型結合となる).
2. 領域 I, III で, $|x| \to \infty$ での境界条件を課せ (一方の解のの係数が 0 になる).
3. 点 $|x| = a$ で, 2 つの波動関数が正しく接続するという条件を課せ.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[4] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.