量子力学 I 演習 問題 (第 9 回)

樋口 さぶろお*

1996 年 6 月 13 日

[9-1]　ゲージ変換

磁場 $\boldsymbol{B}$ 中の電荷 e の粒子の Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}))^2 + U(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

で与えられる．ただし, $U(\boldsymbol{x})$ はポテンシャル, $\boldsymbol{A}$ は磁場を表すベクトルポテンシャル: $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

1. ベクトルポテンシャルにゲージ変換 $A'(\boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x}) + \nabla\chi(\boldsymbol{x})$ を施しても, 磁場 $\boldsymbol{B}$ には変化がないことを示せ. ただし $\chi(\boldsymbol{x})$ は実スカラー関数.
2. $\psi(\boldsymbol{x})$ をベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ のもとでの Hamiltonian の固有関数とする．ゲージ変換されたベクトルポテンシャル $A'(\boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x}) + \nabla\chi(\boldsymbol{x})$ のもとでは,

   $$\psi'(\boldsymbol{x}) = \exp(ie\chi(\boldsymbol{x})/\hbar)\psi(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

   が Hamiltonian の固有関数になることを示せ [1, 問題 3-6[3]].

Remark 物理を変えないゲージ変換のもとで, 波動関数は位相だけ変化する.

[9-2]　磁場中の自由粒子

1. 3 次元空間の質量 m, 電荷 e の自由粒子を考える．p_x, p_y, p_z の同時固有状態 (固有値 $\hbar k_x, \hbar k_y, \hbar k_z$) が Schrödinger 方程式を満たすことを示し, その状態のエネルギーを求めよ.
2. 磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ があるとする．$\boldsymbol{\Pi} := \boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ と定義するとき, これを用いて Hamiltonian をかけ．$\boldsymbol{A}$ はベクトルポテンシャル．このとき p_x, p_y, p_z の同時固有状態は, 一般には Hamiltonian の固有状態ではないことを説明せよ.

---

*Internet address: `hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp` URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

3. 磁場 $\boldsymbol{B}$ が一様で z-軸に平行であるとする: $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$. この磁場を表すベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ をひとつかけ.

4. このとき, 交換関係 $[\Pi_x, \Pi_y]$ を求めよ.

5. 1 次元の調和振動子との類推で, エネルギー固有値が

$$E_{k_z,n} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \frac{|eB|\hbar}{m}\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}) \tag{3}$$

とかけることを説明せよ.

Hint 適当にスケール倍すれば, Π_x, Π_y の交換関係, Hamiltonian への現れ方は, 調和振動子の q, p のそれと同じである.

[9-3] 1 次元の井戸型ポテンシャル

質量 m の粒子が, 1 次元空間を, 幅 $2a$, 深さ U_0 の '井戸型' ポテンシャル

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \quad \text{領域 I} \\ U_0(< 0) & |x| < a \quad \text{領域 II} \\ 0 & x > +a \quad \text{領域 III} \end{cases} \tag{4}$$

のもとで運動している. 束縛状態のエネルギーを求めよ (注: エネルギーは超越関数を含んだ方程式の根として与えられるが, その方程式は解けないので, 方程式をできるだけ簡単化するだけでよい). 基底状態, いくつかの励起状態の波動関数の概要を示せ.

解き方が思いうかばない人は, 以下の手順に従ってもよい. 規格化は気にしなくてよい.

1. エネルギーを E とおき, 領域 I, II, III で, それぞれ Schrödinger 方程式を解け (それぞれ, 2 つの解の線型結合となる).

2. 領域 I, III で, $|x| \to \infty$ での境界条件を課せ (一方の解のの係数が 0 になる).

3. 点 $|x| = a$ で, 2 つの波動関数が正しく接続するという条件を課せ.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[4] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.