量子力学 I 演習 問題 (第 11 回)

樋口 さぶろお*

1996 年 6 月 27 日

教科書を買っていない人のための摂動論の公式集

縮退のない場合　非摂動 Hamiltonian を H_0, その固有関数, エネルギー固有値を $\psi_1, \psi_2, \ldots$, $E_1 < E_2 < \cdots$ とする. 摂動をうけた Hamiltonian を $H = H_0 + \lambda V$ とすると, その固有関数 ϕ_n, エネルギー固有値 W_n は, λ に関する巾級数として,

$$(1) \quad W_n = E_n + \lambda\langle\psi_n|V|\psi_n\rangle + \lambda^2 \sum_{k\neq n} \frac{\langle\psi_n|V|\psi_k\rangle\langle\psi_k|V|\psi_n\rangle}{E_n - E_k} + \cdots,$$

$$(2) \quad \phi_n = \psi_n + \lambda \sum_{k\neq n} \frac{\langle\psi_k|V|\psi_n\rangle}{E_n - E_k}\psi_k + \lambda^2 \times (\text{ 複雑 [1, 例題 4.1]}) + \cdots$$

(ほとんど) 縮退のある場合　非摂動 Hamiltonian を H_0, その固有関数, エネルギー固有値を $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_a, \psi_{a+1}, \ldots$, $E_1 < E_2 < \cdots < E_a \approx E_{a+1} < \cdots$ とする. 摂動をうけた Hamiltonian を $H = H_0 + \lambda V$ とすると, $a, a+1$ に対応する 固有関数 ϕ_n, エネルギー固有値 W_n は, λ に関する巾級数として,

$$(3) \quad W_a = W_a^{(0)} + \lambda W_a^{(1)} + \lambda^2 \sum_{k\neq a,a+1} \frac{\left\langle\phi_a^{(0)}|V|\psi_k\right\rangle\left\langle\psi_k|V|\phi_a^{(0)}\right\rangle}{W_a^{(0)} - E_k} + \cdots,$$

$$(4) \quad \phi_a = \phi_a^{(0)} + \lambda \sum_{k\neq a,a+1} \frac{\left\langle\psi_k|V|\phi_a^{(0)}\right\rangle}{W_a^{(0)} - E_k}\psi_k + \lambda^2 \times (\text{複雑}) + \cdots.$$

ただし, $\phi_a^{(0)}, W_a^{(0)} + \lambda W_a^{(1)}, \phi_{a+1}^{(0)}, W_{a+1}^{(0)} + \lambda W_{a+1}^{(1)}$ は, ψ_a と ψ_{a+1} の間で対角化を行なって決める.

1 次の摂動のもとで縮退が残る場合には別の考察が必要.

*Internet address: `hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp` URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

[11-1]　縮退のない場合の摂動論

2 つの エネルギー固有状態を持つ系に対する摂動を考える. 無摂動状態の固有関数を基底にとったとき, 摂動をうけた系の Hamiltonian 行列を

$$(5)\quad H = H_0 + \lambda V = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix}$$

とする. ただし λ は摂動パラメタ.

摂動を受けた系 $H = H_0 + \lambda V$ は厳密に解くことができる.

固有方程式 $\det(H - E\mathbf{1}) = 0$ を解いて, 固有値は

$$(6)\quad E_\pm = \tfrac{1}{2}\left(E_1 + E_2 \pm \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4\lambda^2|a|^2}\right).$$

対応する (規格化されていない) 固有状態は, 方程式 $H\phi_\pm = E_\pm\phi_\pm$ を解いて,

$$(7)\quad \phi_\pm = -\lambda a\psi_1 + \tfrac{1}{2}\left(E_1 - E_2 \mp \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4\lambda^2|a|^2}\right)\psi_2.$$

ここで, $\psi_1 = {}^t(1,0), \psi_2 = {}^t(0,1)$ とおいた. $|E_1 - E_2| \gg |\lambda a|$ と仮定すると, 縮退のない場合の摂動論が使える. 摂動を受けた系のエネルギー固有値を, 摂動の 1 次, および 2 次で求めよ. 摂動を受けた系の固有関数を, 摂動の 1 次で求めよ. 結果を厳密解と比較せよ.

Hint.　比較するには, $|\lambda a|/|E_1 - E_2| \ll 1$ で展開する.

[11-2]　縮退のある場合の摂動論

3 つの エネルギー固有状態を持つ系に対する摂動を考える. 無摂動状態の固有関数を基底にとったとき, 摂動をうけた系の Hamiltonian 行列を

$$(8)\quad H = H_0 + \lambda V = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a^* & 0 & b \\ b^* & b^* & c \end{pmatrix}$$

とする. ただし λ は摂動パラメタ, $E_1 < E_2 < E_3$.

$|E_1 - E_2| \ll |\lambda a| \ll |E_2 - E_3|$ のとき, 縮退のある場合の摂動論を用いるのが適切である. 摂動を受けた系のエネルギー固有値を, 摂動の 2 次で求めよ. 摂動を受けた系の固有関数を, 摂動の 1 次で求めよ.

Hint.　ほとんど縮退した準位 E_1, E_2 を対角化するには, 前の問題での厳密解が使える.

[11-3]　1 次元調和振動子に対する摂動

1 次元の調和振動子 $H = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$ に摂動

$$(9)\quad 1.\quad \lambda x \qquad 2.\quad \frac{1}{2}\lambda x^2$$

がくわわった. 摂動論の 1 次および 2 次でエネルギー固有値を求めよ. また, 摂動を用いずに厳密に解いた結果と比較せよ [1, 例題 4.2, 問題 4-1[1]].

Hint. 行列要素の計算には, 生成消滅演算子を用いるとよい.

[11-4] 等方的な 2 次元調和振動子に対する非等方的摂動

2 次元の等方的調和振動子を考える [1, 問題 4-2[1]]:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2). \tag{10}$$

1. 基底エネルギーを求めよ (1 次元の調和振動子の解は知っているものとしてよい).
2. 摂動 $V = \lambda m\omega^2 xy$ ($\lambda \ll 1$) がくわわったとき, 摂動論を用いて, 基底エネルギーを λ の 2 次で求めよ.
3. 摂動のくわわった系の基底エネルギーを厳密に求めよ.

Hint. 適当に座標軸をとり直して変数分離する.

[11-5] 等方的な 2 次元調和振動子に対する非等方的摂動 II

式 (10) において,

1. 低い方から 3 つのエネルギー固有状態を求めよ (1 次元の調和振動子の解は知っているものとしてよい).
2. 摂動 $V = \lambda m\omega^2 xy$ ($\lambda \ll 1$) がくわわったとき, 摂動論を用いて, 低い方から 3 つのエネルギー固有状態を λ の 0 次で, エネルギー固有値を λ の 1 次で求めよ.
3. 摂動のくわわった系のエネルギー固有値を厳密に求めよ.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[4] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.