

量子力学 I 演習 問題 (第 12 回)

樋口 さぶろお*

1996 年 7 月 4 日

[12-1] スピン

電子はスピン $1/2$ を持つ. スピン演算子 $S = (S_x, S_y, S_z)$ は, 以前に導入した角運動量演算子 $L = (L_x, L_y, L_z)$ で, $j = 1/2$ に制限したものと同一である [復習すると, L^2, L_z の同時固有関数を ψ_{jm} とかき, $L^2\psi_{jm} = j(j+1)\hbar\psi_{jm}, L_z\psi_{jm} = m\hbar\psi_{jm}$].

1. 昇降演算子 $L_{\pm} := L_x \pm iL_y$ を定義すると,

$$(1) \quad L_{\pm}\psi_{jm} = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\hbar\psi_{j, m \pm 1}$$

なのだった.

S_z の $m_s = \pm 1/2$ の固有状態をそれぞれ,

$$(2) \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (= \psi_{1/2, +1/2}), \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (= \psi_{1/2, -1/2})$$

という表示をとる. このとき, $S_{\pm} = S_x \pm iS_y, S_z$ を行列表示せよ. これから, S_x, S_y の行列表示を求めよ.

2. S_y の行列の固有値, 固有ベクトルを求めよ. 規格化されたスピン状態

$$(3) \quad a\alpha + b\beta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

に対して, S_y を測定した時, 結果として $+\hbar/2$ を得る確率はどれだけか.

Hint ベクトル $a\alpha + b\beta$ を S_y の固有ベクトルの線型結合として書く.

*Internet address: hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp URL: <http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/>,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

[12-2] スピン

1. 電子の z 方向のスピンを測定し, 上向き ($S_z = +\hbar/2$) の電子だけを透過させるようなフィルターがある. 電子線を, このフィルターを通し, その後, x 方向のスピンを測定する. どのような状態がどのような確率で得られるか.
2. 同様に, フィルター透過後, z -軸と θ の角をなす z' -軸に平行なスピンを測定した場合にはどうか.

Hint. z' -軸方向のスピン演算子 $S_{z'}$ を, S_x, S_y, S_z の線型結合としてかけ.

[12-3] 変分法

ポテンシャル

$$(4) \quad V = \begin{cases} 0, & \text{for } |x| < a \\ \infty, & \text{for } |x| > a \end{cases}$$

のもとで運動する 1 次元の量子力学的粒子を考える.

ポテンシャルの形から, 波動関数 $\Psi(x)$ には, 境界条件

$$(5) \quad \Psi(x) = 0 \quad \text{for } |x| > a$$

が課される (もちろん, Ψ は $|x| = a$ で連続である).

この問題を変分法で解こうとするとき, 上の境界条件から, 試行関数として, 例えば,

$$(6) \quad \Psi_\lambda(x) = a^\lambda - |x|^\lambda$$

を思いつく ($\lambda \in \mathbb{R}$ は変分パラメタ).

1. この試行関数を用いて, 変分法で, 基底エネルギーの近似値を求めよ.
2. この系の厳密な基底状態は,

$$(7) \quad \Psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \frac{\pi x}{2a} & \text{for } |x| < a \\ 0 & \text{for } |x| > a \end{cases}$$

であることが示せる. これから厳密な基底エネルギーを計算し, 上の近似値と比較せよ.

参考文献

- [1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.
- [2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.
- [3] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.
- [4] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.