

量子力学 II 演習 問題 (第 3 回)

樋口 さぶろお*

1998 年 5 月 6 日

[3-1] 固有状態, 規格直交性, 期待値

有限な 1 次元空間 $0 < x < L$ に拘束された粒子の波動関数

$$\psi_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (1)$$

を考える. $A_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$.

1. この波動関数が, 自由粒子の Hamiltonian $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$ の固有関数であることを示せ. 固有値を求めよ.
2. 規格化定数 A_n を適当に定めて, $\{\psi_n\}$ が正規直交系となるようにせよ.
3. 上の波動関数の重ねあわせ

$$\phi(x) = \psi_1(x) - 2\sqrt{-1}\psi_2(x) \quad (2)$$

を定義する. 状態 $\psi_1(x), \phi(x)$ についてそれぞれ, 粒子のエネルギーを測定すると, どのような確率でどのような結果が得られるか.

4. 状態 $\psi_1(x), \phi(x)$ についてそれぞれ, エネルギーの期待値を求めよ.
5. 状態 $\psi_1(x), \phi(x)$ についてそれぞれ, 位置の期待値を求めよ.

[3-2] 同時対角化可能性

1. 演算子 A, B が可換であるとする. 波動関数 ϕ が, 演算子 A の固有値 a の固有関数であるとする. 波動関数 $B\phi$ も, 演算子 A の固有値 a の固有関数であることを示せ.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: <http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/>,
Room: Komaba 16-809B, Phone: (03)54.54.67.35

2. 演算子 A の固有値 a の固有関数は, ϕ (とその定数倍) しかないとする. (これを, ‘固有値 a に縮退がない’ という). このとき, ϕ は B の固有関数でもあることを示せ.

[3-3] 並進演算子

演算子 $x, p = -i\hbar(d/dx)$ を 1 次元の位置, 運動量演算子とする. すなわち, $[x, p] = i\hbar$.

1. 交換子 $[x, \exp(ipa/\hbar)]$ を求めよ. a は実数.

Hint. \exp を巾級数展開するか, 次の事実を使う. “ $[[A, B], B] = 0$ なら, $[A, f(B)] = [A, B]f'(B)$.”

2. 波動関数 $\psi_0(x)$ を, 演算子 x の固有関数とする. 固有値を x_0 とする. すなわち, $x\psi_0(x) = x_0\psi_0(x)$. 波動関数 $\exp(ipa/\hbar)\psi_0(x)$ も演算子 x の固有関数であることを示せ. 固有値は何か (上の交換子が計算できれば, $\psi_0(x)$ の具体的な形はいらないはず).

Hint. $x \exp(ipa/\hbar)\psi_0(x) = (\text{固有値}) \times \exp(ipa/\hbar)\psi_0(x)$ がいえればよい.

3. 演算子 $\exp(ipa/\hbar)$ にはどのような直観的意味があるか.

[3-4] 正規直交完全系

1. 波動関数系 $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ を考える. この波動関数系が正規直交系であるということの定義を, bra, ket 記号 \langle, \rangle を用いて書け.
2. 以下, この波動関数系が正規直交系であるとする. ある波動関数 ψ が, 係数 $c_k \in \mathbb{C}$ を用いて,

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \phi_k(x) \quad (3)$$

と表されているとする. $c_k = \langle \phi_k | \psi \rangle$ を示せ.

3. 任意の波動関数 ψ が, ある係数 $c_k \in \mathbb{C}$ を用いて, 式 (3) のように表されるとき, 波動関数系 $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ は完全系であるという. 完全系であることと, ‘閉包の式’

$$1 = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\phi_k\rangle \langle \phi_k| \quad (4)$$

が成立することとが同値であることを示せ.