量子力学 II 演習 問題 (第 10回)

樋口 さぶろお*

1998年7月1日

非定常状態の摂動論

時間に依存していない非摂動 Hamiltonian H_0 に時間に依存する摂動 $\lambda V(t)$ が加わって $H = H_0 + \lambda V(t)$ となったとする ($\lambda \ll 1$). 波動関数 $\Psi(x,t)$ に対する Schrödinger 方程式は

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = [H_0 + \lambda V(t)]\Psi. \tag{1}$$

波動関数 $\Psi(x,t)$ を, 非摂動 Hamiltonian H_0 の固有関数 $\psi_s(x)$ (エネルギー固有値 E_s) で

$$\Psi(x,t) = \sum_s a_s(t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_s t\right)\psi_s(x) \tag{2}$$

と展開する. このとき a_s の時間発展を決める方程式は

$$\frac{da_s(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\sum_j a_j(t)\lambda\langle\psi_s|V(t)|\psi_j\rangle \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(E_j - E_s)t\right) \tag{3}$$

である.

とくに, 時刻 $t=0$ で系が状態 ψ_n にあったとき, 摂動の 1 次で

$$a_s(t) = \delta_{sn} - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\lambda\langle\psi_s|V(t')|\psi_n\rangle \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(E_n - E_s)t'\right). \tag{4}$$

---

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, Room: Komaba 16-809B, Phone: (03)54.54.67.35

[10-1]　時間に依存する摂動論

2 つの状態を持つ量子力学的系があり, その Hamiltonian 行列が

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

と書かれる. 系は時刻 $t = 0$ に, 状態 ${}^t(1,0)$ にあった. 摂動

$$\lambda V(t) = \lambda \begin{pmatrix} 0 & \cos\omega t \\ \cos\omega t & 0 \end{pmatrix} \qquad (\omega \in \mathbb{R}, \lambda \ll |E_1 - E_2|) \tag{6}$$

が加わり全 Hamiltonian が $H = H_0 + \lambda V(t)$ となる. 時刻 $t > 0$ での 状態 ${}^t(0,1)$ の振幅を, 時刻に依存する摂動論を用いて λ の 1 次まで計算せよ. ただし, $|E_1 - E_2 \pm \hbar\omega|$ はあまり小さくないと仮定してよい.

[10-2]　指数関数的に減少する力

1 次元の調和振動子

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{7}$$

を考える. 生成消滅演算子は $b, b^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x \pm \frac{ip}{m\omega}\right)$ で定義されるのだった. 系は $t < 0$ では基底状態にあった. $t > 0$ で時間に依存する摂動

$$\lambda V(x,t) = \lambda A x^2 \exp[-t/\tau] \tag{8}$$

が加わったとする.

十分時間が経過したとき $(t \gg \tau)$, 系が各励起状態にある確率を, 時間に依存する摂動論の 1 次で求めよ.

[10-3]　指数関数的に減少する力

1 次元の調和振動子

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{9}$$

考える. 生成消滅演算子は $b, b^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x \pm \frac{ip}{m\omega}\right)$ で定義されるのだった.

時刻 $t < 0$ では, 系は基底状態にあったとする. 時刻 $t \geq 0$ で摂動として, 力

$$F(t) = \lambda F_0 \exp[-t/\tau] \tag{10}$$

が加わったとする ($F_0, \tau \in \mathbb{R}$ は定数). 時刻 $t \geq 0$ で系が第 1 励起状態にある確率を求め, 極限 $t \to \infty$ でこの確率がある値に収束することを示せ. 1 次の摂動論の範囲で, 第 2 以上の励起状態への遷移は起こるか.

[10-4] 周期的に変化する摂動

1 次元の調和振動子時刻 $t < 0$ では系は基底状態にあった. 時刻 $t > 0$ で摂動 potential

$$V(t) = \lambda F_0 x \cos \omega' t \tag{11}$$

が加わった. 期待値 $\langle x \rangle$ の時間変化を摂動論で求めよ. その計算は $\omega' \simeq \omega$ でも正しいか考えよ.