量子力学 II 演習 問題 (第 12回)

樋口 さぶろお*

1998年7月22日

お知らせ

- この演習の評価は, 毎週の提出物で行ないます.
- 7月27日までに成績に関する掲示を行ないます. 成績についての疑問, 質問, (場合によっては) 追加レポートについての相談は 7月31日までにお願いします.

Spin

Spin-$\frac{1}{2}$ の spin 演算子 $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ は, 角運動量演算子 $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$ で, 全角運動量に制限 $\mathbf{S}^2 = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})\hbar^2$ を課したもの. したがって, 交換関係は, 角運動量と同様に

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \text{cyclic permuation.} \tag{1}$$

S_z の固有状態は $2 \times \frac{1}{2} + 1 = 2$ 個あり, これを $\psi_\pm$ とすると

$$S_z\psi_\pm = \pm\tfrac{1}{2}\hbar\psi_\pm, \qquad \mathbf{S}^2\psi_\pm = \tfrac{3}{4}\hbar^2\psi_\pm. \tag{2}$$

昇降演算子 $S_\pm = S_x \pm iS_y$ を導入すると,

$$S_\mp\psi_\pm = \hbar\psi_\mp, \qquad S_\pm\psi_\pm = 0. \tag{3}$$

*`hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp`, URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`, Room: Komaba 16-809B, Phone: (03)54.54.67.35

[12-1] スピン

Spin-$\frac{1}{2}$ を考える.

1. S_z の $\pm\frac{1}{2}\hbar$ の固有状態をそれぞれ,
$$\psi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$
という表示をとる. このとき, $S_\pm = S_x \pm iS_y, S_z$ を 2×2 行列表示せよ. これから, S_x, S_y の行列表示を求めよ.
2. S_y の行列の固有値, 固有ベクトルを求めよ. 規格化されたスピン状態
$$a\psi_+ + b\psi_- = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1, \tag{5}$$
に対して, S_y を測定した時, 結果として $+\hbar/2$ を得る確率はどれだけか.

Hint. ベクトル $a\psi_+ + b\psi_-$ を S_y の固有ベクトルの線型結合として書く.

[12-2] スピン

1. 電子の z 方向のスピンを測定し, 上向き ($S_z = +\hbar/2$) の電子だけを透過させるようなフィルターがある. 電子線を, このフィルターを通し, その後, x 方向のスピンを測定する. どのような状態がどのような確率で得られるか.
2. 同様に, フィルター透過後, z-軸と θ の角をなす z'-軸に平行なスピンを測定した場合にはどうか.

Hint. z'-軸方向の単位 vector を $\mathbf{e}_{z'}$ とすると, 演算子 $\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_{z'}$ に対応する物理量を測定したことになる.

[12-3] スピン歳差運動

スピンは磁気双極子モーメントをもつ. いま, spin-$\frac{1}{2}$ を考え, その磁気双極子モーメントが $e\hbar/2mc$ であるとすると, 磁場 $\mathbf{B}$ との相互作用は, Hamiltonian
$$H = -\frac{e}{mc}\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) \tag{6}$$

で与えられる. z 軸方向の一様磁場 $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ の場合は単に

$$H = -\frac{eB}{mc} S_z \tag{7}$$

となる.

1. この系のエネルギー固有値, 固有状態を求めよ.
2. 時刻 $t = 0$ で, 系は S_x の, 固有値 $+\frac{1}{2}\hbar$ の固有状態にあったとする. 時刻 t での S_x の期待値 $\langle S_x \rangle$ を求めよ.
3. 同様に, 時刻 t での S_y, S_z の期待値$\langle S_y \rangle, \langle S_z \rangle$ を求めよ.

[12-4] Stern-Gerlach の実験

Spin-$\frac{1}{2}$ の粒子の ビームを, 順に次の 3 つの filter を通す.

フィルター 1 S_z を測定し, 固有値 $+\frac{1}{2}\hbar$ の粒子だけを通す.

フィルター 2 $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ を測定し, 固有値$+\frac{1}{2}\hbar$ の粒子だけを通す. ただし, $\mathbf{n}$ は, z-軸の正の方向から x-軸の正の方向に角度 θ だけ離れた方向の単位 vector.

フィルター 3 S_z を測定し, 固有値 $-\frac{1}{2}\hbar$ の粒子だけを通す.

フィルター 1 を通過した粒子が, すべてのフィルターを通過する確率を求めよ.

[12-5] スピン

Spin-$\frac{1}{2}$ が, $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ の, 固有値 $+\frac{1}{2}\hbar$ の固有状態にある. ただし, $\mathbf{n}$ は, z-軸の正の方向から x 軸の正の方向に θ だけ離れた方向の単位 vector.

1. S_x を測定した時に, 結果が $+\frac{1}{2}\hbar$ となる確率を求めよ.
2. S_x の分散

$$\langle (S_x - \langle S_x \rangle)^2 \rangle \tag{8}$$

を求めよ.