量子力学 II 演習 問題 (第 1回)

樋口 さぶろお*

1996 年 10 月 17 日

はじめに　この演習では, 問題を解くことを通して, 講義 '量子力学 II' の内容を復習します. したがって, '量子力学 II' の内容を一通り通過していることを前提とします. 多くの人は, 文献 [1] に基づく吉岡先生の '量子力学 II' の授業を受けたことと思います.

教科書　プリントを配布します. 問題の一部は, 量子力学 II の教科書 [1] に基づきます.

評価　出席回数, 授業中に解いた問題, レポートなどにより判定します. 出席重視. 試験は行わない予定.

通知　この演習に関する通知は, 4 号館 413B 号室の前の壁, および

URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/qm2/`

で行ないます. 必ずしも 4 号館の入口の掲示板は用いないので注意して下さい.

演習の進め方　未定ですが, 今回については,

- 授業時間内にいくつかの問題をレポート用紙 (A4 だと助かる) に解いて提出してください. たくさん解けなかった場合でも, 授業中に物理を考えていたことがわかるように何か書いて提出して下さい. これで出席とします.
- 水曜日の朝までに, 暇と興味に応じて好きなだけ問題を解いて, レポートとして 413B の前のポストに提出して下さい. 授業中に解いた分とあわせて, 1 (大) 問以上解くようにして下さい.
- 次回に問題 (の一部) を解説し, 間に合えばレポートを返却します.

以下は問題.

*Internet address: `hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp` URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

[1-1] 復習

ポテンシャル $V(x)$ のもとで 1 次元空間を運動する, 質量 m の粒子を考える.

1. 波動関数 $\Psi(x,t)$ の満たす (時間に依存する) Schrödinger 方程式を書け. また, $\Psi(x,t) = \psi(x)\phi(t)$ と変数分離されるとき, $\psi(x)$ に対する定常状態の Schrödinger 方程式を書け.

2. ポテンシャルが

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & (x < 0, L < x) \\ 0 & (0 < x < L) \end{cases} \tag{1}$$

であるときに, エネルギー固有値とエネルギー固有状態を求めよ.

[1-2] 確率の流れ

1. 1 次元の波動関数 $\Psi(x,t)$ を考えたとき, 関数

$$\rho(x,t) := |\Psi(x,t)|^2 \tag{2}$$

は確率密度と解釈される. 局所的な確率保存則は, 連続の式

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} j(x,t) = 0 \tag{3}$$

により表される. ここで確率流れ密度 $j(x,t)$ が

$$j(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\left[\Psi(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)^* - \Psi(x,t)^*\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)\right] \tag{4}$$

とかけることを示せ.

Hint. この $j(x)$ が連続の式をみたすことを示せばよい.

2. 次の波動関数について, 確率密度, 確率流れ密度を求めよ.

$$\begin{aligned} \Psi(x,t) &= \exp(ikx - i\omega t), && (5)\\ \Psi(x,t) &= \exp(-x/a - i\omega t), && (6)\\ \Psi(x,t) &= \int dk \frac{Aa}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-a^2(k-k_0)^2/2} \mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}. && (7) \end{aligned}$$

Remark. 確率流れ密度は, 3 次元では vector となり,

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) = \frac{i\hbar}{2m}\left[\Psi(\boldsymbol{x},t)\nabla\Psi(\boldsymbol{x},t)^* - \Psi(\boldsymbol{x},t)^*\nabla\Psi(\boldsymbol{x},t)\right] \tag{8}$$

と書かれる.

[1-3]　角運動量の合成

Spin 1/2 を持つ 2 つの fermion $i=1,2$ があり, その spin 演算子を $\boldsymbol{S}_i=(S_{ix},S_{iy},S_{iz})$ とかく. $\boldsymbol{S}_i^2$ と S_{iz} の同時固有状態を $v_{i\pm}$ とする. すなわち

$$
\begin{aligned}
(9)\quad \boldsymbol{S}_i^2 v_{i\pm} &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\hbar^2 v_{i\pm} \\
(10)\quad S_{iz} v_{i\pm} &= \pm\frac{\hbar}{2} v_{i\pm}
\end{aligned}
$$

とする (いわば, $v_\pm \equiv \psi_{\frac{1}{2}\,\pm\frac{1}{2}}$). 演算子 $\boldsymbol{S}=(S_x,S_y,S_z)$ を $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2$ と定義する.

1. 状態 $v_{1\pm}v_{2\pm}$ (複号同順でない) のうち, $\boldsymbol{S}^2, S_z$ の同時固有関数であるものはどれか. 式

   $$(11)\quad 2\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2 = S_{1+}S_{2-}+S_{1-}S_{2+}+2S_{1z}S_{2z}$$

   が有用かもしれない ($S_\pm := S_x \pm \sqrt{-1}S_y$).

2. 上の spin 波動関数の適当な線形結合をとって, spin triplet, spin singlet の波動関数を作れ.

[1-4]　交換演算子

上の記号のもとで,

1. Spin triplet, spin singlet は, spin 交換演算子 $P_{12}^\sigma v_{1a}v_{2b}=v_{1b}v_{2a}$ の固有状態になっていることを示せ. 固有値は何か.

2. $$(12)\quad P_{12}^\sigma = \frac{1}{2}+\frac{2}{\hbar^2}\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2$$

   を, 右辺を実際に 4 つの状態に作用させてみることにより示せ. 式 (11) を用いるとよいかもしれない.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] 小出, 量子力学 (II) (改訂版), 基礎物理学選書 5B(1990), 裳華房.

[4] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.