量子力学 II 演習 問題 (第 3回)

樋口 さぶろお*

1996 年 10 月 31 日

[3-1] 多粒子の量子力学

内部自由度のない 2 つの Bose 粒子が 1 次元の調和振動子ポテンシャルの中で運動している:

$$(1) \quad H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2 + x_2^2).$$

1. 2 つの粒子が区別できるとき, 2 粒子系のエネルギー固有状態 $\Psi(x_1, x_2)$ とエネルギー固有値を求めよ. ただし, 1 粒子の調和振動子の固有関数 $\psi_n(x)$ とエネルギー固有値 $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ を用いて表せばよい. (i.e. Hermite 多項式の具体的な形は書かなくてよい).

Hint. 変数分離.

2. 2 つの粒子が同種粒子で区別できないとき, 2 粒子系のエネルギー固有状態 $\Psi(x_1, x_2)$ とエネルギー固有値を求めよ. ただし, 上と同様に $\psi_n(x)$ と E_n で書けばよい.

Hint. 対称化.

[3-2] 重心座標と相対座標

上の問題で,

1. (区別できる) 2 粒子間の相互作用ポテンシャル $V_{\mathrm{int}} = \frac{1}{2}f \cdot (x_1 - x_2)^2$ がはたらいているとき, エネルギー固有状態とエネルギー固有値を求めよ.

Hint. 重心座標と相対座標で書き直す, あるいは適当な線形結合をとって '対角化' する.

2. 上で, 2 つの粒子が同種粒子で区別できないとき, 2 粒子系のエネルギー固有状態 $\Psi(x_1, x_2)$ とエネルギー固有値を求めよ. ただし, 上と同様に $\psi_n(x)$ と E_n で書けばよい.

*Internet address: `hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp` URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

Hint. Hermite 多項式 $H_n(x)$ は n が偶 (奇) のとき偶 (奇) 関数.

[3-3]　角運動量の合成

Spin 1 を持つ 2 つの (区別できる) boson $i = 1, 2$ があり, その spin 演算子を $\boldsymbol{S}_i = (S_{ix}, S_{iy}, S_{iz})$ とかく. $\boldsymbol{S}_1^2$ と S_{1z} の同時固有状態を $u_m (m = -1, 0, +1)$ とし, $\boldsymbol{S}_2^2$ と S_{2z} の同時固有状態を $v_m (m = -1, 0, +1)$ とする.

すなわち

$$
(2)\qquad \begin{aligned} \boldsymbol{S}_1^2 u_m &= 1(1+1)\hbar^2 u_m \qquad & S_{1z} u_m &= m\hbar u_m \\ \boldsymbol{S}_2^2 v_m &= 1(1+1)\hbar^2 v_m \qquad & S_{2z} v_m &= m\hbar v_m \end{aligned}
$$

とする (いわば, $u_m, v_m \equiv \psi_{j=1,m}$). 演算子 $\boldsymbol{S} = (S_x, S_y, S_z)$ を $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ と定義する.

1. 状態 $u_1 v_1$ が $\boldsymbol{S}^2, S_z$ の同時固有関数であることを示せ. 固有値は何か. 式

   $$(3)\qquad 2\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 = S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+} + 2S_{1z}S_{2z}$$

   が有用かもしれない ($S_\pm := S_x \pm \sqrt{-1} S_y$).

2. 状態 $u_1 v_1$ に S_- を繰り返し作用させたものは, また $\boldsymbol{S}^2, S_z$ の同時固有状態であり, $j = 2$ の 5 重項をなす. これらの固有状態を求め, 規格化せよ.

3. 他に, $j = 1$ の 3 重項, $j = 0$ の 1 重項がある. これらに属する状態を求めよ.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] 小出, 量子力学 (II) (改訂版), 基礎物理学選書 5B(1990), 裳華房.

[4] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.