# 量子力学 II 演習 問題 (第 10回)

樋口 さぶろお*

1996 年 12 月 19 日

### [10-1] 3 次元の箱型ポテンシャル

質量 $m$ の量子力学的粒子が, 3 辺が $a \times b \times c$ の箱に閉じ込められている. すなわち 3 次元のポテンシャル

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 & (0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c) \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

のもとで運動している.

1. Hamiltonian の固有状態と固有値を求めよ.

*Hint.* 変数分離.

2. 粒子が, 上で求めた固有状態の 1 つにあるときに, 箱の壁 $x = 0$ が受ける圧力を求めよ.

*Hint.* $dE = -pdV$.

3. $L := a = b = c$ とする. 運動量の固有値の大きさが $p$ と $p + dp$ の間にある準位の数を $\rho(p)dp$ とかく. 準位密度 $\rho(p)$ を評価せよ.

### [10-2] 回転対称井戸型ポテンシャル

質量 $m$ の量子力学的粒子が, 2 次元空間を, ポテンシャル

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & (x^2 + y^2 < a^2) \\ +\infty & (x^2 + y^2 \geq a^2) \end{cases}$$

のもとで運動している.

*Internet address: `hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp` URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

1. Hamiltonian の固有状態を求める．波動関数が動径部分 $R(r)$ と角度部分 $\Theta(\theta)$ の積でかけるとして, $\Theta(\theta)$ の満たす方程式をみちびけ ( $\Theta$ が, ある演算子の固有状態であるという式になる)．ただし, Laplacian の極座標表示は

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \tag{1}$$

2. 角度部分が $\Theta_n(\theta) \sim \exp(in\theta)$, $n \in \mathbf{Z}$ であることを示せ.

3. 角度部分が $\Theta_n(\theta)$ であるときに動径部分 $R(r)$ の満たす方程式を考える．波動関数と座標 $x$ を適当に定数倍すると Bessel の微分方程式

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}z\frac{d}{dz}f(z) + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right)f(z) = 0$$

に帰着することを示せ.

4. Bessel の微分方程式の解で, $x = 0$ で発散しないものが Bessel 関数 $J_n(x)$ である．Bessel 関数の $x > 0$ なる零点を $0 < \gamma_{n1} < \gamma_{n2} < \cdots < \gamma_{nk} < \cdots$ とする．固有関数が, 規格化を除いて, $n, k$ により

$$\Psi_{n,k}(x, y) \propto J_n(\gamma_{nk}r/a)\exp(in\theta)$$

となることを示し, エネルギー固有値を $\gamma_{nk}$ を用いてかけ.

file=bessel.eps,width=4.5in

図 1: Bessel 関数 $J_0, J_1, J_2, J_3$

# 参考文献


[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] 小出, 量子力学 (II) (改訂版), 基礎物理学選書 5B(1990), 裳華房.

[4] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.